

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ-
ΙΟΥΝΙΟΥ 2005

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ (ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ)

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1^ο

Α. Έστω E η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = p^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου C στο σημείο A έχει εξίσωση $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = p^2$.

Μονάδες 10

Β. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ευθειών του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ στα σημεία του, που έχουν τετμημένη 4.

Μονάδες 9

Γ. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y - 2 = 0$ εφάπτεται του κύκλου C .

Μονάδες 6

Θέμα 2^ο

Α. Έστω α, β, γ ακέραιοι. Να αποδείξετε την ιδιότητα: «Αν α/β και α/γ , τότε $\alpha/(\beta + \gamma)$ ».

Μονάδες 8

Β. Για ποιες τιμές του ακέραιου κ , ο αριθμός $\frac{3\kappa + 4}{5}$ είναι ακέραιος;

Μονάδες 10

Γ. Αν m/a και $m > 1$, να αποδείξετε ότι $m \neq a + 1$.

Μονάδες 7

Θέμα 3^ο

Α. Έστω δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Αν $M(x, y)$ οι συντεταγμένες του μέσου M του AB , να δείξετε ότι: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Μονάδες 10

Β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά, αν:

$$3\vec{A\Gamma} - 2\vec{A\Gamma} + \vec{A\Gamma} = 3\vec{B\Gamma} - \vec{A\Gamma}$$

Μονάδες 7

Γ. Να αποδείξετε ότι: i) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$

$$\text{ii) } \vec{u} - \vec{v} = \frac{1}{4}|\vec{u} + \vec{v}|^2 - \frac{1}{4}|\vec{u} - \vec{v}|^2$$

Μονάδες 8**Θέμα 4^ο**

A. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες: $\varepsilon_1: (\lambda+1)x+2\lambda x+7=0$ και $\varepsilon_2: -\lambda x+3y+\lambda=0$, να είναι κάθετες.

Μονάδες 7

B. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: y = -x+7$, $\varepsilon_2: y = \sqrt{3} \cdot x+4$, $\varepsilon_3: x=3$,
 $\varepsilon_4: x - y + 3 = 0$, $\varepsilon_5: x - \sqrt{3} \cdot y + 5 = 0 \cdot x + 4$,
 $\varepsilon_6: y=1$

Να τις γράψετε στη σειρά ώστε κάθε επόμενη να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία μεγαλύτερη από την προηγούμενή της.

Μονάδες 6

Γ. Έστω $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta > 0$ και οι ευθείες $\varepsilon_1: \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$ και $\varepsilon_2:$

$$\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} = 1$$

Να αποδείξετε ότι οι ε_1 και ε_2 τέμνονται σε σημείο που ανήκει στην ευθεία $y=x$

Μονάδες 12**Παρατηρήσεις:**

1. Να απαντηθούν όλα τα θέματα στην κόλλα αναφοράς
2. Να μην σημειώσετε τίποτα πάνω στην κόλλα των θεμάτων παρά μόνο το όνομά σας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!