

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη Σωστό ή Λάθος

δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{\beta}, \lambda \in \mathbf{R}$

β. Αν $\vec{a} = (x, y)$, τότε $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 - y^2}$

γ. Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

δ. Αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία.

ε. Στην παραβολή $y^2 = 2px$, η εξίσωση της διευθετούσας είναι $x = \frac{p}{2}$

στ. Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερή

διαφορά $2a$ είναι $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\beta = \sqrt{\gamma^2 - a^2}$

(Μονάδες 12)

B. Να συμπληρώσετε στις παρακάτω ισότητες τα κενά που σημειώνονται με

α. Αν $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = \dots\dots\dots$

β. Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \dots\dots\dots$

γ. Αν $M_0(x_0, y_0)$ και $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ τότε $d(M_0, \varepsilon) = \dots\dots\dots$

δ. Στην έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ όπου $\beta = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$ η εφαπτομένη $M_1(x_1, y_1)$

αυτής είναι

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

(Μονάδες 8)

Γ. Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν a και β ακέραιοι με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι κ και υ , τέτοιοι ώστε

α. $a = \kappa + \upsilon$ β. $\beta = a - \kappa \cdot \upsilon$ με $\upsilon \geq 0$ γ. $a = \kappa \cdot \beta + \upsilon$ με $0 \leq \upsilon < |\beta|$

(Μονάδα 1)

Δ. α) Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων.

(Μονάδα 2)

β) Έστω μία ευθεία δ και ένα σημείο E εκτός της δ . Τι ονομάζεται παραβολή με εστία

το σημείο E και διευθετούσα την ευθεία δ ;

(Μονάδες 2)

Θέμα 2

Αν $3\vec{B\Lambda} - \vec{A\Gamma} - \vec{B\Gamma} = -\vec{A\Gamma} + 2\vec{B\Gamma}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 25)

Θέμα 3

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $4x^2 + 9y^2 = 36$

α. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα της έλλειψης.

(Μονάδες 15)

β. Στο σημείο Α της έλλειψης με τετμημένη 1 να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας.

(Μονάδες 10)

Θέμα 4

Αν ο α είναι ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = \frac{a^3 + 5a}{3}$ είναι ακέραιος.

(Μονάδες 25)