

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1

Α. Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} και \vec{b} , τα οποία δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα $\gamma' \gamma$ και έχουν συντελεστές διεύθυνσεως λ_1 και λ_2 αντιστοίχως.

Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$

(Μονάδες 10)

Β. Έστω δύο σημεία E και E' του επιπέδου. Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία E και E' στο συγκεκριμένο επίπεδο;

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Ένα διάνυσμα και μία ευθεία, αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσεως είναι παράλληλα.

(Μονάδες 2)

β. Αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία.

(Μονάδες 2)

γ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

(Μονάδες 2)

δ. Το μέσο $M(x, y)$ ενός τμήματος AB που έχει άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ έχει συντεταγμένες $x = \frac{x_2 - x_1}{2}$ και $y = \frac{y_2 - y_1}{2}$

(Μονάδες 2)

ε. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα $2a$ είναι $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ όπου $b = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$

(Μονάδες 2)

Θέμα 2

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, -1)$, $B(2, 3)$, $\Gamma(-2, 6)$. Να βρείτε :

α. τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{AB} , $\vec{A\Gamma}$, $\vec{B\Gamma}$

(Μονάδες 5)

β. την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$ και το μήκος του ύψους $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$

(Μονάδες 5)

γ. το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{AB} , $\vec{A\Gamma}$

(Μονάδες 5)

- δ. τη γωνία \hat{A} του τριγώνου ΑΒΓ (Μονάδες 5)
- ε. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ (Μονάδες 5)

Θέμα 3

Δίνεται η εξίσωση $\varepsilon_\lambda : (\lambda-1)x+2(\lambda+1)y+4\lambda+8 = 0, \lambda \in \mathbf{R}$

- α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση ε_λ παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του λ (Μονάδες 5)
- β. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ (Μονάδες 6)
- γ. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία να περνά από την αρχή των αξόνων (Μονάδες 6)
- δ. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_λ διέρχονται από σταθερό σημείο το οποίο να βρεθεί (Μονάδες 8)

Θέμα 4

Δίνεται ο ακέραιος $a = 6k+5$, όπου $k \in \mathbf{Z}$

- α. Να αποδείξετε ότι ο a είναι περιττός αριθμός (Μονάδες 6)
- β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του a με το 3 (Μονάδες 8)
- γ. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = a^2-1$ είναι πολλαπλάσιο του 12 (Μονάδες 11)