

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο Α. Δίδεται ο κύκλος: $x^2 + \psi^2 = \rho$, $\rho > 0$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) σε ένα σημείο του $A(\chi_1, \psi_1)$ έχει εξίσωση:

$$x \chi_1 + \psi \psi_1 = \rho^2 \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

Β. Έστω δύο σημεία E και E' ενός επιπέδου. Τι ονομάζουμε έλλειψη με εστίες τα σημεία E και E' στο συγκεκριμένο επίπεδο;

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

Α. Δίνονται οι ακέραιοι α, β, γ με $\alpha \neq 0$. Αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid (2\beta + \gamma)$ (Μονάδες 2)

Β. Η εξίσωση $x^2 + \psi^2 + \lambda = 0$ με $\lambda > 0$ είναι εξίσωση κύκλου (Μονάδες 2)

Γ. Αν $\vec{\alpha} = (\chi_1, \psi_1)$ και $\vec{\beta} = (\chi_2, \psi_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου $O\chi\psi$ τότε ισχύει: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \chi_1\psi_1 + \chi_2\psi_2$

(Μονάδες 2)

Δ. Στην παραβολή $\psi^2 = 2px$ η εξίσωση της διευθετούσας είναι $x = -p/2$ (Μονάδες 2)

Ε. Η εξίσωση $\psi - 2 = \lambda(x - 3)$, $\lambda \in \mathcal{R}$ παριστάνει για τις διάφορες τιμές του λ όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(3, 2)$

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ 2^ο Α. Έστω ακέραιος α για τον οποίο ισχύουν:

$$3 \mid (2\alpha - 7) \text{ και } 3 \mid (\alpha - 5)$$

Να αποδειχθεί ότι

α. $3 \mid (\alpha - 2)$

(Μονάδες 7)

β. $\alpha^2 = 3\lambda + 1$, όπου $\lambda \in \mathcal{Z}$

(Μονάδες 10)

γ. $18 \mid (\alpha^2 + 2)(\alpha^2 - 1)$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3^ο Δίδονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$

α. Να βρεθεί ο αριθμός $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

(Μονάδες 5)

β. Αν $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ τότε:

i) να βρεθούν τα μέτρα $|\vec{u}|$ και $|\vec{v}|$

(Μονάδες 10)

ii) να βρεθεί η γωνία (\vec{u}, \vec{v})

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4^ο

Θεωρούμε τον κύκλο (C) με κέντρο $K(-1,0)$ που διέρχεται από το σημείο

$$A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

A. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου (C).

B. Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη (ε) του κύκλου στο σημείο $A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ έχει εξίσωση

$$x - \sqrt{3}y - 1 = 0$$

(Μονάδες 7)

Γ. Αν η ευθεία (ε) διέρχεται από την εστία της παραβολής που έχει κορυφή $O(0,0)$ και άξονα συμμετρίας τον ημιάξονα Ox , τότε:

i) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής.

(Μονάδες 6)

ii) Αν η διευθετούσα της παραβολής τέμνει τον κύκλο (C) στα σημεία M και N να αποδείξετε ότι: $(AMN) = 0,5$ τετραγωνικές μονάδες

(Μονάδες 7)