

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

## Θέμα 1

Α. Πότε η εξίσωση  $x^2 + \psi^2 + \alpha x + \beta \psi + \gamma = 0$  παριστάνει κύκλο ; Ποιο είναι το κέντρο του και

ποια η ακτίνα του

( Μονάδες 10 )

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. αν  $\vec{u} \perp \vec{v}$  τότε  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$  και αντίστροφα . Δίνεται  $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$

β. αν  $\vec{z}, \vec{w}$  διανύσματα με  $\vec{z} \neq \vec{0}$  τότε  $\vec{z} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \text{προβ}_{\vec{z}} \vec{w}$

γ. αν  $|A| + |B| = 0$  η εξίσωση  $Ax + B\psi + \Gamma = 0$  παριστάνει ευθεία

δ. στη παραβολή  $\psi^2 = 2\rho x$  η εστία είναι  $E\left(\frac{\rho}{4}, 0\right)$  και η διευθετούσα  $x = -\frac{\rho}{4}$

( Μονάδες 15 )

## Θέμα 2

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + \psi^2 + (\lambda - 1)x + (1 - \lambda)\psi - \frac{\lambda^2}{2} = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

α) να εξετάσετε για ποιες τιμές του  $\lambda$  η εξίσωση παριστάνει κύκλο ( Μονάδες 10 )

β) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων ( Μονάδες 10 )

γ) για ποια τιμή του  $\lambda$  η οικογένεια των παραπάνω κύκλων διέρχεται από  $O(0,0)$  (

Μονάδες 5 )

## Θέμα 3

α) Αν  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δυο διανύσματα με  $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1 + \sqrt{3}, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$  και  $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$  . Να

βρείτε

το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{u}$  (

Μονάδες 15 )

β) Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - \psi^2 + 6x + 9 = 0$  . Να δείξετε ότι αυτή παριστάνει

δυο κάθετες ευθείες (

Μονάδες 10 )

## Θέμα 4

- A. Δίνεται ο ακέραιος  $a = 2004κ + 2005$ , όπου  $κ ∈ \mathbb{Z}$
- α. Να δείξετε ότι : 1) ο  $a$  είναι περιττός αριθμός 2) το  $a^2 + 23$  είναι πολ/σιο του 8
- β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $a$  με το 4 ( Μονάδες 10 )
- B. Δίνονται οι κωνικές τομές  $\psi^2 = 2\chi$  και  $9\chi^2 + 4\psi^2 = 1$
- α) να βρείτε τις εστίες τους
- β) να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης
- γ) αν  $M, N$  είναι τα κοινά σημεία των δυο παραπάνω κωνικών τομών , να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου  $OMN$  όπου  $O$  η αρχή του συστήματος συντεταγμένων ( Μονάδες 15 )

