

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1

Α. Έστω a, β, γ ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι :

- α. Αν a/β και β/a τότε $a = \beta$ ή $a = -\beta$
 β. Αν a/β και β/γ τότε a/γ

(Μονάδες 10)

Β. Έστω διάνυσμα $\vec{a} = (x, y)$

Να γράψετε πότε ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος \vec{a} καθώς και πώς ορίζεται (με τι ισούται).

(Μονάδες 6)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη

Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Έστω διάνυσμα \vec{AB} και τυχαίο σημείο αναφοράς O . Η διανυσματική

ακτίνα του μέσου M του τμήματος AB ισούται με $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$

(Μονάδες 3)

β. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$

(Μονάδες 3)

γ. Η υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις

$$y = \frac{a}{\beta}x, y = -\frac{a}{\beta}x$$

(Μονάδες 3)

Θέμα 2

Έστω τα σημεία $A(1, \sqrt{3}), B(2, 0), \Gamma(3, 3\sqrt{3})$.

α. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$.

(Μονάδες 15)

β. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 3

Έστω οι εξισώσεις :

$$ax^2+(a+9)y^2 = a(a+9) \quad (1) \text{ και } (a-11)x^2-(a-12)y^2 = (a-11)(a-12) \quad (2)$$

όπου a θετικός ακέραιος.

A. i. Αν το πηλίκο της διαίρεσης του 224 με τον a είναι 14 τότε ο a είναι :

a. 16 ή 17 ή 18 β. 15 ή 16 ή 17 γ. 15 ή 16 δ. 16 ή 17
(Μονάδες 4)

ii. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 9)

B. Για $a = 16$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) είναι εξίσωση έλλειψης ενώ η εξίσωση (2) είναι εξίσωση υπερβολής με ίδιες εστίες. Να βρεθούν οι εκκεντρότητές τους.
(Μονάδες 12)

Θέμα 4

Δίνεται η εξίσωση $y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0$

a. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες με εξισώσεις :

$$\varepsilon_1 : y = x + 2 \text{ και } \varepsilon_2 : y = x - 2$$

Ποια είναι η γωνία που σχηματίζουν με τον $x'x$;

(Μονάδες 8)

β. Να αποδείξετε ότι η ε_1 εφάπτεται στην παραβολή $y^2 = 2px$ στο σημείο $A(2,4)$ αυτής.

(Μονάδες 7)

γ. Αν A το κοινό σημείο της ε_2 με τον $x'x$ να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία ε_1 και εφάπτεται στην ευθεία ε_2 στο σημείο A .

(Μονάδες 10)