

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ
ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2005 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΤΑΞΗ Β΄

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ1:

- A. Αν α, β, γ ακέραιοι αριθμοί να αποδείξετε ότι
 α) αν α/β και α/γ τότε $\alpha/(\beta+\gamma)$
 β) αν α/β τότε $\alpha/\lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ (μονάδες 6+5)

- B. Να χαρακτηρίσετε Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις
 α) η εξίσωση της έλλειψης με εστίες $E'(-\gamma, 0), E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα 2^a είναι

$$\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \text{ όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$$

β) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$

γ) $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ (μονάδες 6)

- Γ. Στη στήλη Α δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη στήλη Β εξισώσεις εφαπτομένων κωνικών τομών στο σημείο επαφής (χ_1, ψ_1) . Να αντιστοιχίσετε κάθε κωνική τομή με την εξίσωση της εφαπτομένης της

ΣΤΗΛΗ Α.	ΣΤΗΛΗ Β.
α) $\chi^2 + \psi^2 = \rho^2$	1. $\psi\psi_1 = \rho(\chi + \chi_1)$
β) $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$	2. $\chi\chi_1 + \psi\psi_1 = \rho^2$
γ) $\psi^2 = 2\rho\chi$	3. $\frac{\chi\chi_1}{\alpha^2} + \frac{\psi\psi_1}{\beta^2} = 1$
δ) $\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$	4. $\chi\chi_1 + \psi\psi_1 = 1$
	5. $\frac{\chi\chi_1}{\alpha^2} - \frac{\psi\psi_1}{\beta^2} = \rho^2$
	6. $\frac{\chi\chi_1}{\alpha^2} - \frac{\psi\psi_1}{\beta^2} = 1$

(μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2:

- 1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 - 4\chi - 8\psi + 15 = 0$ παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του
- 2) να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\chi-1)(\chi-3) + (\psi-2)(\psi-6) = 0$ παριστάνει τον προηγούμενο κύκλο
- 3) να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του Α(1,2)
(μονάδες 12+5+8)

ΘΕΜΑ 3 :

$$\text{Αν } |\vec{\alpha}|=2, |\vec{\beta}|=3, \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -6 \text{ και } \vec{\chi} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$$

α) να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Τι διανύσματα είναι αυτά;

β) να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\chi}$

γ) τι συμπεραίνεται για το διάνυσμα $\vec{\chi}$

(μονάδες 5+15+5)

ΘΕΜΑ 4 :

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha+1)\chi+(2\alpha-1)\psi+(2\alpha-7)=0, \alpha \in \mathbb{R}$ και το σημείο $A(2,-4)$.

Να αποδείξετε ότι :

- 1) η εξίσωση για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία
- 2) όλες οι ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο P
- 3) Ποια από τις ευθείες αυτές είναι παράλληλη στον $\chi' \chi$
- 4) να βρείτε την εξίσωση της AP
- 5) ποια από τις ευθείες που διέρχονται από το P είναι κάθετη στην AP
- 6) ποια από τις ευθείες που διέρχονται από το P απέχει την ελάχιστη απόσταση από το A και ποια την μέγιστη;

(μονάδες 5+5+5+4+4+2)