Θέμα 1ο

Α. Να δείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνας ρ έχει εξίσωση $\chi^2+\psi^2=\rho^2$

Μονάδες 10

Β.

i. Έστω Ε΄ και Ε δυο σημεία του επιπέδου .Τι ονομάζουμε έλλειψη με εστίες τα σημεία Ε και Ε΄ .

ii. Γράψτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $Μ(\chi_0,\psi_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Μονάδες 5

C. Να χαρακτηρίσετε τις πιο κάτω προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό ή Λάθος** δίπλα στο γράμμα που ακολουθεί σε κάθε πρόταση

Μονάδες 10

i. Αν $\vec{\alpha}=(\chi,\psi)$ τότε $|\vec{\alpha}|=\sqrt{\chi^2+\psi^2}$

ii. Η παραβολή με εξίσωση $\psi^2=2\rho\chi$ έχει εστία $Ε(\frac{P}{2},0)$ και διευθετούσα δ: $\chi=-\frac{P}{2}$

iii. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $C: \frac{\chi^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$

έχουν εξισώσεις : $\psi=\frac{\beta}{\alpha}\chi$, $\psi=-\frac{\beta}{\alpha}\chi$

iv. Η εξίσωση $\chi^2+\psi^2+Α\chi+Β\psi+Γ=0$ παριστά κύκλο όταν $Α^2+Β^2-4Γ^2>0$

v. Η απόσταση ενός σημείου $Μ(\chi_o,\psi_0)$ του επιπέδου από την ευθεία (ε) $Α\chi+Β\psi+Γ=0$ δίνεται από τον τύπο :

$$d(M_0,\varepsilon)=\frac{|Α\chi_0+Β\psi_0+Γ|}{\sqrt{Α^2+Β^2}}$$

Θέμα 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(1,2)$ $\vec{w}=(\chi,\psi)$,$\chi,\psi \in R$

A. Να υπολογίσετε

i. το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$

Μονάδες 8

ii. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{w}$ σε συνάρτηση των χ,ψ.

Μονάδες 8

B. Αν για τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{w}$ ισχύει $\vec{u}\perp\vec{w}$ και $|\vec{w}|=2|\vec{u}|$.βρείτε το διάνυσμα $\vec{w}$

Μονάδες 8

Θέμα 3ο

Δίνονται τα σημεία Α(-1,2) Β(1,4) και Ο(0,0)

A. Να βρείτε :

i. την εξίσωση της ευθείας ΑΒ

Μονάδες 5

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ

Μονάδες 5

B. Αν Γ και Δ είναι τα σημεία που η ευθεία ΑΒ τέμνει τους άξονες χ΄χ και ψ΄ψ αντίστοιχα τότε :

i. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των Γ και Δ

Μονάδες 5

ii. Να δείξετε ότι : 2(ΟΓΔ)=3(ΟΑΒ)

Μονάδες 5

C. Να βρεθεί το πλησιέστερο σημείο της ΑΒ προς την αρχή των αξόνων .

Μονάδες 5

Θέμα 4.

Δίνεται η εξίσωση : $x^2+\psi^2+\lambda\chi-\lambda\psi+2\lambda-2=0$ (1) , $\lambda \in R$

A. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

Μονάδες 7

B. Για $\lambda=0$ να βρείτε

i. το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που προκύπτει από την (1)

ii. την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του με τετμημένη 1 και τεταγμένη θετική .

Μονάδες 6

C. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση (1)

Μονάδες 6

D. Δείξτε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο .

Μονάδες 6

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ ΚΑΙ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

copyright © 2005- 2006

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ ΚΑΙ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
copyright © 2005- 2006

Λύσεις

Θέμα 1 Γ) Σ ,Σ ,Σ ,Λ, Σ

Θέμα 2

Α. i. $|\vec{u}|=\sqrt{5}$

ii $\vec{u}\cdot\vec{w}$=x+2ψ

Β. $\vec{u}\perp\vec{w} \Leftrightarrow$ x+2ψ=0 $\Leftrightarrow$ x=-2ψ (1)

$|\vec{w}|=2|\vec{u}| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+\psi^2}=2\sqrt{5} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \sqrt{5\psi^2}=2\sqrt{5} \Leftrightarrow 5\psi^2=4.5 \Leftrightarrow$ ψ=2 ή ψ=-2

Για ψ=2 έχω χ=-4 άρα $\vec{w}$=(-4,2)

Για ψ=-2 έχω χ=4 άρα $\vec{w}$=(4,-2)

Θέμα 3^o

Α. ΑΒ: ψ-4=1.(χ-1) $\Leftrightarrow$ ψ=χ+3

Β.

i) Γ: Για ψ=0 έχω χ=-3 άρα Γ(-3,0

Δ: Για χ= 0 έχω ψ=3 άρα Δ(0,3)

ii). 2(ΟΓΔ)=9

$3(OAB)=3.\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}\ 3.\frac{1}{2}.6=9$ άρα ισχύει

C. Το ζητούμενο σημείο θα είναι η προβολή Κ του Ο στην ΑΒ

$\lambda_{AB}=1$

ΟΚ$\perp$ΑΒ $\Leftrightarrow \lambda_{OK}=-1$ άρα ΟΚ: ψ=-χ

$$K: \begin{cases}\psi=\chi+3\\ \psi=-\chi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\psi=\frac{3}{2}\\ \chi=-\frac{3}{2}\end{cases} \text{ άρα } K(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$$

Θέμα 4

A. Πρέπει $A^2+B^2-4\Gamma>0 \Leftrightarrow 2\lambda^2-8\lambda+8>0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2>0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$

B. $K(-\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})$ $\rho=\frac{|\lambda-2|}{2}$

C. Για $\chi=-\frac{\lambda}{2}$ και $\psi=\frac{\lambda}{2}$ έχω ότι (ε) : ψ=-χ

Επειδή $\lambda \neq 2$ άρα $\chi \neq -1$ επομένως ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων είναι η ευθεία (ε) χωρίς το σημείο της (-1,1).

D. Για λ=0 έχω $C_1: x^2+\psi^2=2$ (1)

Για λ=1 έχω $C_1: x^2+\psi^2+\chi-\psi=0$(2)

Από (1) και (2) έχω $\chi-\psi=-2 \Leftrightarrow \chi=\psi-2$
Για χ=ψ-2 από (1) έχω $\psi^2-4\psi+4+\psi^2=2 \Leftrightarrow \psi^2-2\psi+1=0 \Leftrightarrow \psi=1$
άρα χ=-1 .Επομένως το κοινό τους σημείο είναι το (-1,1)

Για να διέρχονται από σταθερό σημείο αρκεί το (-1,1) να επαληθεύει την (1) για κάθε λ
Πράγματι χ=-1 και ψ=1 έχω
$1+1-\lambda-\lambda2\lambda-2=0 \Leftrightarrow 0=0$. Άρα όλοι οι κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο το (-1,1)