

**ΤΑΞΗ Β΄**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

copyright © 2005- 2006

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.** Αν  $\vec{a}, \vec{v}$  είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με  $\vec{a} \neq \vec{0}$  και η προβολή του  $\vec{v}$  στο  $\vec{a}$  συμβολίζεται με  $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$ , τότε να αποδείξετε ότι  $\vec{a} \cdot \vec{v} = a \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$ .

Μονάδες 12

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Η εκκεντρότητα της υπερβολής  $x^2 - y^2 = a^2$  είναι  $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

β) Η ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$ .

γ) Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία  $E'(-\gamma, 0)$ ,  $E(\gamma, 0)$  και σταθερό

άθροισμα 2α είναι  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  όπου  $b = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$ .

δ) Η εφαπτομένη της παραβολής  $x^2 = 2py$  στο σημείο της  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $x_1 x = 2py_1$ .

Γ) Ποτέ η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα του;

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Για τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}$  δίνεται ότι  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{\beta}| = 2$  και  $\left( \vec{a}, \vec{\beta} \right) = \frac{\pi}{3}$ . Έστω ακόμη τα

διανύσματα  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}$ ,  $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$ . Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 5

β) τα μέτρα  $|\vec{u}|, |\vec{v}|$  των διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$

Μονάδες 8

γ) το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Μονάδες 8

δ) το  $\text{συν} \left( \vec{v}, \vec{u} \right)$ .

Μονάδες 4

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ ΚΑΙ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 4y + 3 = 0$ . (1)

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει τις παράλληλες ευθείες  $\epsilon_1: y = x - 1$  και  $\epsilon_2: y = x - 3$

Μονάδες 8

β) Να σχεδιάσετε τις  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$ .

Μονάδες 4

γ) Να βρείτε την απόσταση των  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$ .

Μονάδες 5

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραapeζίου που σχηματίζεται από τις  $\epsilon_1, \epsilon_2$  και τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

Μονάδες 8

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Έστω τα σημεία  $A(0, a), E(0, 2a)$  με  $a > 0$  και τα συμμετρικά τους ως προς την αρχή των αξόνων  $A'$  και  $E'$  αντίστοιχα.

α) Να βρείτε:

i) την εξίσωση του κύκλου (C) με διάμετρο  $AA'$ .

Μονάδες 2

ii) τις εξισώσεις των εφαπτομένων  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  του κύκλου (C) που διέρχονται από το σημείο E και να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν.

Μονάδες 13 (3 - 5)

β) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εφαπτόμενες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  του κύκλου (C) και οι ασύμπτotes της υπερβολής με εστίες τα σημεία E και E' και κορυφές τα σημεία A και A' σχηματίζουν δυο ζεύγη καθέτων ευθειών.

Μονάδες 10

- Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
- Στη φωτοτυπία των θεμάτων θα γράψετε μόνο το όνομα σας και όλες τις απαντήσεις των θεμάτων να τις γράψετε στην κόλλα σας.
- ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 2 ΩΡΕΣ.

Καλή επιτυχία