

ΘΕΜΑΤΑ

1°

A) Έστω δυο σημεία $A(x_1, \psi_1)$, $B(x_2, \psi_2)$. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου M, του τμήματος AB, δίνονται από τον τύπο

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right) \quad (\text{M. } 12,5)$$

B) Είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω προτάσεις; (M. 10)

i) Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1$

ii) Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

iii) Το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης, δύο κάθετων ευθειών, είναι ίσο με -1

iv) Η εξίσωση $(x - x_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2 = \rho^2$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο με συντεταγμένες $(-x_0, -\psi_0)$

Γ) Με ποια προϋπόθεση η εξίσωση $x^2 + \psi^2 + Ax + B\psi + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο; (M. 2,5)

Αν αριθμός a είναι άρτιος να αποδείξετε ότι $\frac{(a+1)^2 + (a-1)^2 + 6}{8} \in \mathbb{Z}$ (M. 2,5)

i) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (2,1)$, $\vec{\beta} = (2 + \sqrt{3}, 1 - 2 \cdot \sqrt{3})$ (M. 1,5)

ii) Για ποια τιμή του χ το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (-1, \chi)$ είναι κάθετο στο \vec{a} ; (M. 1,0)

Δίνεται το σημείο $M(1,4)$ και ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 4x + 6\psi - 12 = 0$

i) Να αποδείξετε ότι το M είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου. (M. 5)

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ευθειών του κύκλου που διέρχονται από το M. (M. 10)

iii) Αν A, B είναι τα σημεία επαφής των εφαπτομένων με τον κύκλο να βρεθεί η απόσταση του M από τη χορδή AB. (M. 10)