

ΑΛΓΕΒΡΑ

Θέμα 1

Α. α) Πότε μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος; (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι : το άθροισμα των πρώτων n όρων μιας γεωμετρικής

προόδου (a_n) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι $S_n = a_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$ (Μονάδες 10)

γ) Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας δίπλα από κάθε αριθμό την έκφραση Σωστό ή Λάθος

1. Οι αριθμοί $-\frac{1}{2}, 1, -2$ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου

2. Οι αριθμοί $3, 1, -1$ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου

3. Η αριθμητική πρόοδος $\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, \dots$ έχει διαφορά $\omega = \frac{1}{2}$

4. Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου τότε ο β είναι πάντοτε ο γεωμετρικός μέσος των α, γ .

5. Αν σε κάθε όρο μιας αριθμητικής προόδου προστεθεί ο ίδιος αριθμός, τότε προκύπτει νέα αριθμητική πρόοδος με ίδια διαφορά. (Μονάδες 10)

Θέμα 2

Σε μια διαίρεση πολυωνύμων με διαιρετέο ένα πολυώνυμο $P(x)$ δίνονται: ο διαιρέτης $\delta(x) = x^2 + x$, το πηλίκο $\Pi(x) = 2x - 3$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x) = x + \lambda$ της διαίρεσης αυτής όπου λ πραγματικός αριθμός.

α) να αποδείξετε ότι $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + \lambda$ (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον -1 (Μονάδες 9)

γ) για $\lambda = 1$ να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$ (Μονάδες 9)

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση f με : $f(x) = 2(\sin^2 x - \eta\mu^2 x) + 1 - 4\eta\mu^2 x \sin^2 x$, $x \in \mathbb{R}$

α) να αποδείξετε ότι $f(x) = \sin 2x(2 + \sin 2x)$ (Μονάδες 10)

β) να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \sin 2x$ (Μονάδες 10)

γ) να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $g(x) = f(x) - \sin^2(2x)$ (Μονάδες 5)

Θέμα 4

Έστω συνάρτηση f με $f(x) = \log(2 + 10^x)$, $x \in \mathbb{R}$

α) να αποδείξετε ότι $f(x) > \log 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 8)

β) να αποδείξετε ότι $f(\log 2) = 2 \log 2$ (Μονάδες 8)

γ) να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 2x$ (Μονάδες 9)