

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ** (κατεύθυνσης)

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>** :

A. α. Να ορίσετε το **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  $\vec{a}, \vec{b}$ .  
(μονάδες 5)

β. Να αποδείξετε ότι για τα μή μηδενικά διανύσματα  $\vec{a}, \vec{v}$  ισχύουν

1.  $\vec{a} \cdot \vec{v} = a \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$  (μονάδες 4)

2.  $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} = \lambda \cdot \vec{a}$ , όπου  $\lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{a^2}$  (μονάδες 4)

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας τη λέξη Σωστό ή λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Η εφαπτομένη της παραβολής  $x^2 = 2py$  σε ένα σημείο της  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $yy_1 = p(x + x_1)$ . (μονάδες 2)

2. Η απόσταση ενός σημείου  $M(x_0, y_0)$  από την ευθεία  $\mathcal{E}$  με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0, A \neq 0 \eta B \neq 0$  δίνεται από τον τύπο:

$$d(M, \mathcal{E}) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (\text{μονάδες } 2)$$

3. Το εμβαδόν τριγώνου  $ΑΒΓ$  δίνεται από τη σχέση:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) \right|. \quad (\text{μονάδες } 2)$$

4. Ισχύει η ισοδυναμία:  $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$ . (μονάδες 2)

5. Η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι μεγαλύτερη της μονάδας. (μονάδες 2)

6. Η γωνία  $\omega$  δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  $\vec{a}, \vec{b}$  δίνεται από τη σχέση:

$$\cos \omega = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}. \quad (\text{μονάδες } 2)$$

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup> :**

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$  (E).

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (E) παριστά κύκλο C του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο K και την ακτίνα ρ. (μονάδες 6)

2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο του A(4,0) και το σημείο τομής B της εφαπτομένης αυτής με τον άξονα y'y. (μονάδες 7)

3. Αν είναι  $\vartheta$  η γωνία των διανυσμάτων  $\vec{BA}, \vec{OK}$  να υπολογίσετε το  $\sin \vartheta$  και την  $\text{προβ}_{\vec{BA}} \vec{OK}$  (μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup> :**

Δίνεται η εξίσωση

$$kx - 2(k + 1)y + 3(k - 1) = 0, k \in R \quad (1)$$

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστά ευθεία για κάθε τιμή του  $k \in R$   
(μονάδες 4)

2. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας (1) διέρχονται από σταθερό σημείο  $P$  του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.  
(μονάδες 7)

3. Να βρείτε ποιά από τις ευθείες της οικογένειας (1) είναι παράλληλη στην ευθεία  
 $\delta: 3x - 4y - 8 = 0$ .  
(μονάδες 8)

4. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου  $P$  από την ευθεία  $\delta$ .  
(μονάδες 6)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup> :**

Δίνεται η υπερβολή  $C_Y: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών της  $E, E'$ , την εκκεντρότητα  $\epsilon$  και τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της, έστω  $\delta, \delta'$ .  
(μονάδες 6)

2. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης  $C_E$  που έχει κορυφές τις εστίες της  $C_Y$  και εστίες τις κορυφές της  $C_Y$ .  
(μονάδες 7)

3. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης  $t$  της  $C_Y$  στο σημείο της  $M\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$  και

να αποδείξετε ότι τέμνει τις ασύππτωτες  $\delta, \delta'$  στα σημεία  $\Gamma(4,6), \Delta\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ .

(μονάδες 7)

4. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $ΟΓΔ$ , όπου  $Ο$  η αρχή των αξόνων, είναι ίσο με  $4$  τ.μ.

(μονάδες 5)

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ  
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!